Externalidades dinámicas y equilibrio competitivo*

Timothy J. Kehoe

Departamento de Economía, Universidad de Minnesota

David K. Levine

Departamento de Economía, Universidad de California, Los Angeles

Paul M. Romer

Centro de Estudios Avanzados en Ciencias Sociales,
Universidad de Stanford

1. Introducción

En este artículo, examinamos el equilibrio de modelos de equilibrio general con externalidades. Nos centramos en la caracterización de dichos equilibrios como soluciones a problemas de optimización. Nuestro marco de análisis consiste en un problema de maximización individual estrictamente cóncavo que depende de un vector de variables agregadas, así como de variables de elección individual. Un conjunto de condiciones laterales requiere que los niveles agregados e individuales sean iguales. Formalmente, esta caracterización es similar a la caracterización de Negishi (1960) de modelos de equilibrio con consumidores heterogéneos sin externalidades como soluciones a problemas de planificación social. La caracterización de Negishi tiene una interpretación en términos de eficiencia en el sentido de Pareto. Aunque dicha interpretación normativa no está disponible en modelos con externalidades, esta caracterización es frecuentemente útil en el cálculo del equilibrio o en la derivación de sus propiedades.

En trabajos recientes, Romer (1986) ha aplicado este marco a modelos con externalidades (los primeros estudios incluyen a Arrow, 1962 y Brock, 1977). Se ha usado un marco similar en investigaciones más recientes sobre impuestos: Abel y Blanchard (1983), Becker (1985), Danthine y Donaldson (1986), y Judd (1987) han investigado situaciones en las que los equilibrios pueden caracterizarse como soluciones a problemas de maximización (sin restricciones laterales). Braun (1988), L.-J. Chang (1988), Jones y Manuelli (1988), Kehoe y Levine (1985) y McGrattan (1988) usan el marco más general. Ginsburgh y van der Heyden (1988) lo han aplicado a modelos con precios fijos institucionalmente. Finalmente, Kehoe, Levine y Romer (1989) proporcionan una aplicación general a impuestos y externalidades.

Este artículo se centra en los problemas que surgen debido a que los parámetros del problema de maximización están determinados endógenamente. En general, los parámetros que satisfacen las condiciones laterales se hallan resolviendo un problema de punto fijo. Este problema de punto fijo puede tener soluciones múltiples. Howitt y McAfee (1988) y Spear (1988) proporcionan ejemplos dinámicos en los que las externalidades causan multiplicidades, de hecho, un continuo de equilibrios. Ajustamos dicha clase de ejemplos en nuestro marco y proporcionamos un ejemplo adicional de externalidades y equilibrios múltiples.

Un aspecto interesante de los ejemplos con multiplicidad de equilibrios es que ilustran la importancia del problema de punto fijo que involucra los parámetros y las condiciones laterales: ningún problema de maximización estrictamente cóncavo puede tener múltiples equilibrios como soluciones. Otro aspecto interesante, enfatizado por Spear (1988), es que un continuo de equilibrios en un modelo dinámico está asociado comúnmente con la posibilidad de equilibrios de manchas solares. Estos son equilibrios en los que la incertidumbre extrínseca, incertidumbre que no afecta directamente la función de utilidad, las dotaciones, o la tecnología de producción, afecta el equilibrio solamente por que los agentes lo esperan. En realidad, el método de Woodford (1986) para construir equilibrios de manchas solares en modelos de generaciones sucesivas con un continuo de equilibrios determinísticos puede ampliarse fácilmente al ejemplo de este artículo.

Como una ilustración final del uso de condiciones laterales en los cálculos, consideramos cómo las externalidades positivas pueden llevar a un crecimiento continuado. Siguiendo a Romer (1989), usamos las condiciones laterales para resolver explícitamente la tasa de crecimiento del equilibrio.

2. Marco general

Para ilustrar cómo puede caracterizarse el equilibrio como soluciones a problemas de optimización, cuál es el valor de esta caracterización, y cuáles son sus limitaciones, estudiamos algunos ejemplos sencillos. Todos los ejemplos se ajustan a un marco general: El equilibrio resuelve el problema de elegir el vector x para resolver

$$\max w(x, z)$$

sujeto a

$$x \in \Gamma(z)$$

Aquí w es una función de bienestar social distorsionada; x incluye los vectores de oferta y demanda individual de los consumidores y las empresas; z es un vector de parámetros agregados y, en una economía con consumidores heterogéneos, incluye ponderaciones sobre las utilidades individuales. El conjunto de

continua que toma valores convexos en x, entonces la solución $x(z)$ y el asociado de multiplicadores de Lagrange $p(z)$ son correspondencias que t valores convexos y son continuas superiormente en z. Si w es estricta cóncava en x, entonces $x(z)$ en una función (univalorada) continua; s continuamente diferenciable, entonces $p(z)$ también es una función (unival continua. Típicamente, $p(z)$ puede interpretarse como precios. En equilib parámetros z son endógenos puesto que dependen de la solución del prc de optimización: además de resolver el problema de optimización anteri equilibrio (z, p, z) debe satisfacer las condiciones adicionales,

$$\psi(x, p, z) = 0$$

donde el vector $\psi(x, p, z)$ tiene la misma dimensión de z. Al usar el proble optimización para definir x y p como funciones de z, se obtiene un siste ecuaciones en z, $\psi(x(z), p(z), z) = 0$.

Para ilustrar la aplicabilidad de este marco en un contexto familiar, cc rese un modelo de intercambio puro con dos consumidores, dos bienes externalidades: Cada consumidor elige el plan de consumo (c_1^i, c_2^i) para re

$$\max u^i(c_1^i, c_2^i)$$

sujeto a

$$p_1 c_1^i + p_2 c_2^i \leqslant p_1 w_1^i + p_2 w_2^i$$
$$c_j^i \geqslant 0$$

Aquí u^i es una función de utilidad monótonamente creciente, estricta cóncava, y continuamente diferenciable, p_1 y p_2 son precios, y w_1^i y dotaciones.

El teorema de Kuhn-Tucker dice que las condiciones necesarias y sufi para una solución a este problema son que exista un multiplicador de La no-negativo λ_i tal que

$$u_j^i(c_1^i, c_2^i) - \lambda_i p_j \leqslant 0, \quad = 0 \text{ si } c_j^i > 0, \quad j = 1,2$$
$$p_1 c_1^i + p_2 c_2^i - p_1 w_1^i - p_2 w_2^i \leqslant 0, \quad = 0 \text{ si } \lambda_i > 0$$

Donde u_j^i es la derivada parcial de u^i con respecto a c_j^i. Un equilibrio modelo es un vector $(p_1, p_2, c_1^1, c_2^1, c_1^2, c_2^2)$ tal que cada consumidor maxir utilidad dados los precios y

$$c_j^1 + c_j^2 - w_j^1 - w_j^2 \leqslant 2, \quad = 0 \text{ si } p_j > 0, \quad j = 1,2$$

Considérese ahora el problema de elegir la asignación $(c_1^1, c_2^1, c_1^2, c$ resolver el problema de planificación social sujeto a

$$c_j^1 + c_j^2 \leqslant w_j^1 + w_j^2, \quad j = 1,2$$
$$c_j^i \geqslant 0$$

donde α_1 y α_2 son las ponderaciones de bienestar no-negativas. Las condiciones necesarias y suficientes para una solución a este problema son que existan multiplicadores de Lagrange no-negativos p_1 y p_2 tales que

$$\alpha_j u_j^1(c_1^1, c_2^1) - p_j \leqslant 0, \quad =0 \text{ si } c_j^i > 0, \quad i = 1,2; \quad j = 1,2$$
$$w_j^1 + w_j^2 - c_j^1 - c_j^2 \geqslant 0, \quad =0 \text{ si } p_j > 0, \quad j = 1,2$$

Nótese que, si igualamos c_j^i y p_j a sus valores de equilibrio y fijamos $\alpha_i = 1/\lambda_i$, el equilibrio resuelve este problema de planificación social. Esto, por supuesto, es el primer teorema de bienestar: un equilibrio competitivo es eficiente en el sentido de Pareto. Nótese también que cualquier asignación eficiente en el sentido de Pareto y los multiplicadores de Lagrange asociados satisfacen todas las condiciones de equilibrio excepto, posiblemente, las restricciones presupuestarias individuales. Este es el segundo teorema de bienestar: cualquier asignación eficiente en el sentido de Pareto puede implementarse como un equilibrio competitivo con transferencias de pagos.

El enfoque de Negishi (1960) para caracterizar el equilibrio de este modelo consiste en considerar las funciones de ahorro que indican hasta qué punto la asignación asociada con las ponderaciones (α_1, α_2) viola la restricción presupuestaria:

$$s_i(\alpha_1, \alpha_2) = \Sigma_{j=1}^2 p_j(\alpha_1, \alpha_2)[w_j^i - c_j^i(\alpha_1, \alpha_2)]$$

Haciendo dichas funciones de ahorro iguales a cero corresponde a las condiciones de equilibrio $\psi(c, p, \alpha) = 0$ en la formulación general. En lugar de calcular el equilibrio resolviendo para precios tal que las funciones de exceso de demanda sean iguales a cero, Negishi propone resolver para ponderaciones de bienestar tales que las funciones de ahorro sean iguales a cero. En realidad, las funciones de ahorro tienen muchas similaridades con las funciones de exceso de demanda: puesto que las funciones de ahorro son homogéneas de grado uno y suman cero, las funciones $s_i(\alpha_1, \alpha_2)/\alpha_i$ tienen las mismas propiedades formales de las funciones de exceso de demanda de un modelo de intercambio puro (diferente) con dos bienes. Para calcular un equilibrio, necesitamos sólo resolver $s_1(\alpha, 1 - \alpha) = 0$. Este enfoque frecuentemente es más fácil que buscar los precios que igualan las funciones de exceso de demanda a cero, especialmente en modelos con más bienes que consumidores.

3. Una economía estática con externalidades

Regresamos ahora a economías con externalidades. Primero, consid[...] un ejemplo estático. Para que la presentación sea simple, retenemos el [...] del consumidor representativo. Como en la sección anterior, podemo[...] mente usar el método de Negishi para incorporar heterogeneidad de co[...] dores.

Hay un continuo de consumidores idénticos. Sea $u(c, x)$ la func[...] utilidad del consumidor representativo donde c es su consumo del úni[...] producido y x es el consumo de ocio. Suponemos que u es continu[...] diferenciable, estrictamente cóncava y monótonamente creciente. (Estos [...] tos son más fuertes de lo necesario; se hacen sólo para facilitar la presen[...] El consumidor está dotado con una unidad de trabajo, la cual puede co[...] como ocio o usarse para producir output del bien de consumo.

El output del bien de consumo es producido por un número infi[...] empresas idénticas. Debido a que hay una externalidad de atascamie[...] función de producción de la empresa representativa $f(\ell, L)$, depende n[...] mente de la cantidad de trabajo como input, ℓ, sino que también de la c[...] promedio de trabajo como input en la economía, L. Suponemos que $f($[...] dos veces continuamente diferenciable y satisface $f_1 > 0$, $f_{11} < 0$, y f_2 [...]

Enfrentándose a precios (p, w) del producto y trabajo y para u[...] promedio de beneficios de producción π, el consumidor elige (c, x) para r[...]

$$\max u(c, x)$$

sujeto a

$$pc + wx \leqslant w + \pi$$
$$c, x \geqslant 0$$

Las condiciones necesarias y suficientes para una solución a este proble[...] que exista un multiplicador de Lagrange no-negativo λ tal que

$$u_1(c, x) - \lambda p \leqslant 0, \quad =0 \text{ si } c > 0$$
$$u_2(c, x) - \lambda w \leqslant 0, \quad =0 \text{ si } x > 0$$
$$w + \pi - pc - wx \geqslant 0, \quad =0 \text{ si } \lambda > 0$$

Enfrentándose a precios (p, w) y un nivel promedio de input de traba[...] cualquier parte de la economía, la empresa elige ℓ para resolver

$$\max pf(\ell, L) - w\ell$$

Las condiciones necesarias y suficientes para una solución de este proble[...]

Un equilibrio de este modelo es un vector $(p, w, \pi, L, c, x, \ell)$ tal que el consumidor maximiza su utilidad tomando p, w y π como dados; la empresa maximiza sus beneficios tomando p, w y L como dados; y

$$\pi = pf(\ell, L) - w\ell$$
$$L = \ell$$
$$c - f(\ell, L) \leqslant 0, \quad = 0 \text{ si } p > 0$$
$$x + \ell - 1 \leqslant 0, \quad = 0 \text{ si } w > 0$$

Los equilibrios de este modelo no son, por supuesto, eficientes en el sentido de Pareto. Considérese, sin embargo, el problema de elegir c, x, y ℓ para resolver el problema de «Pareto».

$$\max u(c, x)$$

sujeto a

$$c \leqslant f(\ell, l)$$
$$x + \ell \leqslant 1$$
$$c, x, \ell \geqslant 0$$

Nótese que L se toma como un parámetro dado. Asociado con cada nivel de L hay un problema diferente y una solución asociada diferente. Las condiciones necesarias y suficientes para una solución a este problema son que existan multiplicadores de Lagrange no-negativos p y w tal que

$$u_1(c, x) - p \leqslant 0, \quad = 0 \text{ si } c > 0$$
$$u_2(c, x) - w \leqslant 0, \quad = 0 \text{ si } x > 0$$
$$pf_1(\ell, L) - w \leqslant 0, \quad = 0 \text{ si } \ell > 0$$
$$f(\ell, L) - c \geqslant 0, \quad = 0 \text{ si } p > 0$$
$$1 - x - \ell \geqslant 0, \quad = 0 \text{ si } w > 0$$

Si normalizamos los precios tal que $\lambda = 1$ y hacemos $\pi = pf(\ell, L) - w\ell$, entonces una solución a este problema satisface todas las condiciones de equilibrio excepto, posiblemente, $\ell = L$.

El encontrar soluciones para la condición lateral $\ell = L$ es equivalente a encontrar el equilibrio de este modelo en la misma forma que encontrar soluciones para la condición lateral $s_1(\alpha, 1 - \alpha) = 0$ es equivalente a encontrar el equilibrio de la economía de intercambio de la sección anterior. Para cualquier nivel de trabajo promedio como input, sea $\ell(L)$ la demanda de trabajo en la solución del problema anterior. La concavidad estricta de u y f implica

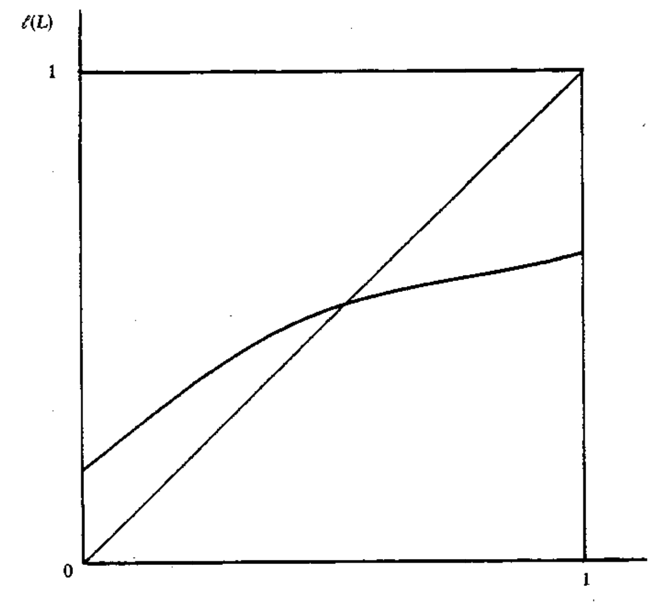

GRAFICO 1

Regresamos ahora al estudio del número de equilibrios. En una
interior las condiciones de equilibrio pueden combinarse para llevar

$$u_1[f(\ell, L), 1 - \ell]f_1(\ell, L) - u_2[f(\ell, L), 1 - \ell] = 0$$

Supóngase que $L = \ell(L)$, $0 < L < 1$, es una solución al problema de pun
que, en el equilibrio en el que $c = f(L, L)$, $x = 1 - L$, y $\ell = L$,

$$u_{11}f_1^2 - 2u_{12}f_1 + uf_{11} + u_{22} \neq 0$$

Entonces el teorema de la función implícita dice que $\ell(L)$ es contin
diferenciable en algún entorno abierto de L y que

$$\ell'(L) = \frac{-u_{11}f_1f_2 - u_1f_{12} + u_{12}f_2}{u_{11}f_1^2 - 2u_{12}f_1 + u_1f_{11} + u_{22}}$$

Supóngase ahora que las funciones u y f son tales que hay una solución

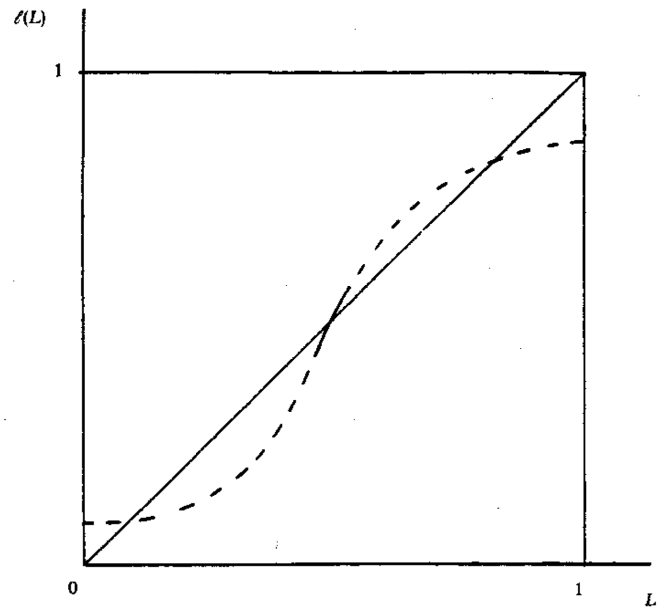

GRAFICO 2

Considérese, por ejemplo, una economía en la cual

$$u(c, x) = 7c + 7/2\,x - 5/2\,c^2 - 1/2\,x^2 - 2cx$$

$$f(\ell, L) = 31/32 + 9/8\,\ell - 1/8\,\ell^2 - L$$

Hay un equilibrio en el que $\ell = L = 1 - x = 1/2$ y $c = f(1/2, 1/2) = 1$. En este caso, $u_1(1, 1/2) = 1$, $u_2(1, 1/2) = 1$, $u_{11}(1, 1/2) = -5$, $u_{12}(1, 1/2) = -2$, $u_{22}(1, 1/2) = -1$, $f_1(1/2, 1/2) = 1$, $f_2(1/2, 1/2) = -1$, $f_{11}(1/2, 1/2) = -1/4$, y $f_{12}(1/2, 1/2) = 0$. Además,

$$\ell'(1/2) = 4/3 > 1$$

Por consiguiente, esta economía tiene múltiples equilibrios. Hay dos equilibrios adicionales. Los tres se enumeran a continuación

L	p	w	c	x
0	5/32	9/16	31/32	1
1/2	1	1	1	1/2

Nótese que están ordenados en el sentido de Pareto: $u(31/32, 1) > u(1,$ $> u(31/32, 0)$.

Hay necesariamente un equilibrio único, sin embargo, si la externali suficientemente pequeña. Si la externalidad es pequeña entonces f_2 y f_{12} cerca del cero. En este caso, $\ell'(L)$ está siempre cerca de cero. Para que múltiples equilibrios, sin embargo, es necesario que $\ell'(L) \geqslant 1$ en algún librio.

4. Determinación en una economía dinámica con externalidades

Consideremos ahora el caso dinámico con una externalidad en el cor El consumidor representativo de vida infinita elige la sucesión de consu c_1, ..., que resuelve

$$\max \Sigma_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sujeto a

$$\Sigma_{t=0}^{\infty} p_t c_t \leqslant \Sigma_{t=0}^{\infty} y_t$$

$$c_t \geqslant 0$$

Donde β, $0 < \beta < 1$, es un factor de descuento; $u(c_t)$ es continuamente d ciable, estrictamente cóncava, y monótonamente creciente; p_0, p_1, ..., sucesión de precios; e y_0, y_1, ..., es una sucesión de rentas.

El sector de producción tiene una externalidad al considerar que la p ción del bien de consumo depende no solamente de los inputs de capital una cantidad fija de trabajo, sino que también depende del consumo prc C_t. Aunque no se intenta que este modelo sea realista, se podría imagin dicha externalidad se debe a males contagiosos en niveles de consumo Suponemos que la función de producción $f(k_t, C_t)$ es continuamente dife ble y que satisface $f_1 > 0$, $f_{11} < 0$, y que $f_{12} > 0$. Implícitamente, ha función de producción $F(k_t, \ell_t, C_t)$ que exhibe rendimientos constantes en Si la tasa de depreciación del capital es δ,

$$f(k_t, C_t) = F(k_t, 1, C_t) + (1 - \delta)k_t$$

Las condiciones necesarias y suficientes para una solución de este prc son que exista un multiplicador de Lagrange no-negativo λ tal que

$$\beta^t u'(c_t) - \lambda p_t \leqslant 0, \quad =0 \text{ si } c_t > 0,\ t = 0, 1, \ldots$$

$$\Sigma_{t=0}^{\infty} y_t - \Sigma_{t=0}^{\infty} p_t c_t \geqslant 0, \quad =0 \text{ si } \lambda > 0$$

Dadas las sucesiones $p_0, p_1, ...,$ y $C_0, C_1, ...,$ la empresa representativa elige $k_0, k_1, ...,$ para resolver

$$\max \Sigma_{t=0}^{\infty} [p_t f(k_t, C_t) - p_t k_{t+1}] - r_0 k_0$$

Las condiciones necesarias y suficientes para una solución son

$$p_0 f_1(k_0, C_0) - r_0 \leqslant 0, \quad =0 \text{ si } k_0 > 0$$
$$p_{t+1} f_1(k_{t+1}, C_{t+1}) - p_t \leqslant 0, \quad =0 \text{ si } k_{t+1} > 0, \quad t = 0, 1, ...$$
$$\lim_{t \to \infty} p_t k_t = 0$$

Un equilibrio es una sucesión de la forma $(p_t, y_t, C_t, c_t, k_t)$ y un precio para el stock de capital inicial r_0 que satisface las anteriores condiciones de maximización para el consumidor y la empresa y las condiciones adicionales

$$y = pf(k_t, C_t), \quad t = 0, 1, ...$$
$$c_t + k_{t+1} - f(k_t, C_t) \leqslant 0, \quad =0 \text{ si } p_t > 0, \quad t = 0, 1, ...$$
$$k_0 - \bar{k}_0 \leqslant 0, \quad =0 \text{ si } r_0 > 0$$
$$C_t = c_t$$

El problema de «Pareto» para esta economía es

$$\max \Sigma_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sujeto a

$$c_t + k_{t+1} \leqslant f(k_t, C_t), \quad t = 1, 2, ...$$
$$k_0 \leqslant \bar{k}_0$$
$$c_t, k_t \geqslant 0$$

De nuevo una solución a este problema satisface todas las condiciones del equilibrio excepto, posiblemente, las condiciones laterales $C_t = c_t$. Para cualquier sucesión $C_0, C_1, ...,$ la concavidad estricta de u y f implica que este problema de optimización tiene una solución única. El resolverlo para un equilibrio es, sin embargo, significativamente más difícil que en el ejemplo anterior: Necesitamos encontrar un punto fijo de una función de dimensión infinita,

$$C_t = c_t(C_0, C_1, ...), \quad t = 0, 1, ...$$

objetivo principal de este artículo es la caracterización, más que la existe
equilibrio, no afrontaremos este problema.

Como en los modelos de Howitt y McAfee (1988) y Spear (1988),
modelo con externalidad dinámica puede en verdad tener un conti
equilibrios. Supóngase que las condiciones de primer orden del probl
«Pareto» se satisfacen todas con igualdad. Podemos entonces reducir el
ma de encontrar un equilibrio al problema de encontrar soluciones al
de dos ecuaciones en diferencia de primer orden

$$-u'(c_t) + \beta u'(c_{t+1}) f_1(k_{t+1}, c_{t+1}) = 0$$
$$f(k_t, c_t) - k_{t+1} - c_t = 0$$

Estas ecuaciones en diferencia requieren dos condiciones iniciales. El val
está dado. ¿Cuánta libertad hay al escoger c_0? Para responder a esta pr
podemos linealizar esta ecuación en diferencias alrededor de una s
estacionaria $(\hat{c}, \hat{k})$. (Para garantizar la existencia de tal solución tendrían
imponer restricciones adicionales a f; el ejemplo que construiremos, sin
go, tiene dicha solución estacionaria). El teorema de la variedad estable l
la teoría de sistemas dinámicos dice que, en casos no degenerados, lo
cierto en la linealización, es cierto también en el sistema no-lineal e
entorno abierto de la solución estacionaria (ver, por ejemplo, Irwin, 1

Para estudiar el comportamiento cualitativo de la linealización calc
las raíces de su polinomio característico, en este caso cuadrático. Si el
de ambas raíces de este polinomio cuadrático son menores que uno, e
todos los valores de k_0 y c_0 permiten converger a la solución estaciona
módulo de una raíz es menos que uno, y el de la otra es mayor q
entonces existe un conjunto afín unidimensional de valores de k_0 y
conducen a la convergencia a la solución estacionaria. Si ninguna raíz es
que uno en módulo, entonces todas las soluciones a la ecuación en dif
divergen de la solución estacionaria al menos que $(c_0, k_0) = (\hat{c}, \hat{k})$.

El teorema de la variedad estable local dice que, si ambas raíc
menores que uno en módulo, entonces la variedad estable del sistema n
—el conjunto de valores (c_0, k_0) que conducen a la convergencia a $(\hat{c}, \hat{k})$—
entorno abierto de $(\hat{c}, \hat{k})$ en R^2; si una raíz es mayor que uno y la otra es
que uno, entonces es una variedad unidimensional que contiene a $(\hat{c}, \hat{k})$
mejor aproximación lineal cerca de $(\hat{c}, \hat{k})$ es el conjunto estable del
linealizado; y si ninguna de las raíces es menor que uno, entonces es e
punto $(\hat{c}, \hat{k})$. Es sólo cuando una de las raíces es exactamente igual a
módulo que el comportamiento del sistema linealizado no proporcio
guía del sistema no-lineal.

Como k_0 está dado, dos raíces menores que uno en módulo implic
hay un continuo de equilibrios indexados por la elección de c_0: Dado
podemos calcular la sucesión (c_1, k_1), (c_2, k_2), ... usando la ecuación en
cias. Los valores de las otras variables pueden calcularse entonces usa

igual a 0, en dicho caso las condiciones de primer orden no se cumplen todas con igualdad. Si, sin embargo, los valores del estado estacionario de $\beta^t\hat{p}$, y $\beta^t\hat{r}$ son todos estrictamente positivos, entonces el que las dos raíces de la función característica cuadrática sean menores que uno en módulo garantiza un continuo de equilibrios si $\bar{k}_0$ está lo suficientemente cerca de $\hat{k}$. Nótese que es imposible que ambas raíces sean menores que uno en módulo en un modelo cuyo equilibrio resuelve un problema de optimización cóncavo sin parámetros endógenos: como hay un único equilibrio, las raíces forman ya sea un punto de silla, una menor que uno en módulo y la otra mayor que uno, o inestabilidad, ambas mayores que uno.

En una solución estacionaria $(\hat{c}, \hat{k})$, si existe, este sistema puede linealizarse como

$$\begin{pmatrix} u'' + \beta u' f_{12} & \beta u' f_{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{t+1} - \hat{c} \\ k_{t+1} - \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'' & 0 \\ f_2 - 1 & f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_t - \hat{c} \\ k_t - \hat{k} \end{pmatrix}$$

Podemos escoger u y f tal que haya una solución estacionaria a esta ecuación en diferencias con un continuo de soluciones que converjan a ella y satisfagan $k_0 = \bar{k}_0$. Para hacerlo así, elegimos u y f tal que los dos valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} u'' + \beta u' f_{12} & \beta u' f_{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u'' & 0 \\ f_2 - 1 & f_1 \end{pmatrix}$$

sean ambos menores que uno en módulo. Estos valores propios son soluciones de la ecuación característica

$$\alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$$

donde

$$\alpha_0 = -u''/\beta$$
$$\alpha_1 = u''/\beta + u' f_{12} + u'' - \beta u' f_{11}(f_2 - 1)$$
$$\alpha_2 = -u'' - \beta u' f_{12}$$

Supóngase, por ejemplo, que $(\hat{c}, \hat{k}) = (2, 1)$, $\beta = 1/2$, $u'(2) = 8$, $u''(2) = -2$, $f_1(1, 2) = 2$, $f_2(1, 2) = 2$, $f_{11}(1, 2) = -2$ y $f_{12}(1, 2) = -3/4$. Entonces $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = -4$ y $\alpha_2 = 5$. En este caso los dos valores característicos son $\lambda = 2/5 \pm 4/5\, i$, los cuales tienen módulo $|\lambda| = 0.8944$. Como en el ejemplo estático, podemos elegir funciones cuadráticas u y f que satisfagan estas restricciones:

$$u(c) = 12c - c^2$$

Nótese que, para que haya un continuo de equilibrios, requerimos q f_{12} sean significativamente diferentes de cero. Si f_2 y f_{12} están cerca de c otras palabras, si la externalidad es pequeña, entonces el sistema line exhibe inestabilidad o un marcado punto de silla. Esto elimina un conti equilibrios que converjan al estado estacionario donde $(\hat{c}, \hat{k}) = (2, 1)$.

5. Crecimiento endógeno en una economía dinámica con externalidade

Consideramos un modelo dinámico con una externalidad de prod más realista. Por sencillez, eliminamos precios suponiendo que cada co dor opera su propia empresa. El consumidor representativo de vida elige la sucesión de consumo $c_0, c_1, \ldots$, para resolver

$$\max \Sigma_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sujeto a $c_t \geqslant 0$ y a la tecnología de producción. El output está dado p función $f(k, K)$ donde k es el stock de capital que pertenece a los consun y K es el stock de capital agregado. Suponemos que f es dos veces co mente diferenciable y que cumple $f_1, f_2 \geqslant 0, f_{11} < 0$. Este es un ejemplo externalidad del tipo desbordamiento *spill-over:* entre más grande es el st capital de otras empresas, mayor es el output que una empresa particula alcanzar. Tal desbordamiento puede ser una importante fuente de creci para países en vías de desarrollo. Puesto que el output puede consun ahorrarse, tenemos la restricción de producción

$$k_{t+1} = f(k_t, K_t) - c_t$$
$$k_t \geqslant 0$$

Los parámetros endógenos son en este caso K_t, y la restricción lat $k_t = K_t$. Resolviendo el problema de optimización vemos que la condi primer orden, o ecuación de Euler, es

$$-u'(c_t) + \beta u'(c_{t+1}) f_1(k_{t+1}, k_{t+1}) = 0$$

la cual, junto con las restricciones, es un sistema de segundo orden.

Si tomamos $u(c) = \log c$ y $f(k, K) = k + \theta k^\alpha K^\eta$ con $\alpha + \eta = 1$, pc resolver explícitamente este sistema:

$$k_{t+1} = k_t + \theta k_t^\alpha K_t^\eta$$
$$\frac{-1}{c_t} + \frac{\beta}{c_{t+1}}(1 + \theta\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} K_{t+1}^\eta) = 0$$

Estas ecuaciones se simplifican, obteniéndose

$$k_{t+1} = (1 + \theta)k_t - c_t$$

$$c_{t+1} = (1 + \theta\alpha)\beta c_t,$$

por lo que $c_t = [(1 + \theta\alpha)\beta]^t c_0$. Sustituyendo en la primera ecuación, y haciendo la conjetura $k_t = [(1 + \theta\alpha)\beta]^t k_0$, encontramos

$$(1 + \theta\alpha)\beta k_0 = (1 + \theta)k_0 - c_0 \quad \text{o} \quad c_0 = [(1 - \beta) + \theta(1 - \alpha\beta)]k_0$$

Dadas la expresión para K_t calculada anteriormente, se sigue que la tecnología a la que se enfrenta un agente individual se parece a la que experimenta cambios tecnológicos exógenos que proceden a una tasa exponencial constante. La tecnología puede escribirse de la forma $f(k, t) = k + \theta k^\alpha A\gamma^t$ donde $\gamma = [(1 + \theta\alpha)\beta]^\eta$. Al nivel de la economía como un todo, el modelo claramente muestra que la tasa de cambio tecnológico se determina endógenamente. Si todos los consumidores son más pacientes en el sentido de que β es grande, o si el parámetro de productividad θ es más alta, o si el término desbordamiento $1 - \alpha$ es más pequeño, entonces la tasa implícita de cambio tecnológico γ que está disponible para cualquier individuo será más rápido. Como resultado, el crecimiento agregado será más rápido. Este tipo de modelo de crecimiento sencillo con efectos externos puede, por lo tanto, proporcionar una sencilla descripción de una tasa de cambio tecnológico que es exógena desde el punto de vista de cualquier individuo o empresa, aunque está determinado endógenamente en la economía como un todo.

6. Ventajas y limitaciones del enfoque

Para calcular el equilibrio de modelos de equilibrio general debemos, en general, poder resolver problemas de punto fijo. (Ver Uzawa (1962) y Scarf (1982) para una discusión de este problema.) La caracterización del equilibrio como soluciones a problemas de optimización es útil en el cálculo de equilibrios en la medida en que es fácil encontrar el problema de optimización que resuelve un equilibrio. Siempre hay un problema de optimización trivial que resuelve un equilibrio $(\hat{x}, \hat{p})$:

$$\max - (\|x - x\|^2 + \|p - p\|^2)$$

La única forma de que podamos encontrar este problema, sin embargo, consiste en calcular el equilibrio por algún otro medio. Este tipo de caracterización obviamente no es muy útil. Otro punto valioso de tratar acerca de los problemas de optimización que podemos considerar es que todos los problemas de

Cualquier problema de punto fijo puede reformularse como un problen optimización,

$$\max - \|z - g(z)\|^2$$

Debido a que la función objetivo no es cóncava, sin embargo, esta formul no es muy útil.

Algunas veces puede demostrarse que el equilibrio de modelos sen resuelven problemas de optimización con pocas o ninguna condición la Considérese, por ejemplo, modelos sin externalidades en los cuales los con: dores satisfacen las condiciones de agregación que considera Gorman (1 donde las funciones de utilidad son todas homotéticas e idénticas y dotaciones arbitrarias, y por Chipman (1974), donde las funciones de uti son también homotéticas pero posiblemente diferentes y los vectores de do nes son proporcionales. En cualquier caso el equilibrio podría, por sup caracterizarse como soluciones a la maximización de una suma pondera las utilidades individuales. Sin embargo, hay caracterizaciones alternativa: evitan el uso de ponderaciones de bienestar que deben resolverse para con nes laterales.

Considérese primero el caso en el que las funciones de utilidad son idén Sea u la representación homogénea de grado uno de la función de uti común. Entonces el equilibrio único de un modelo con m consumidores pu encontrarse resolviendo

$$\max u(\Sigma_{i=1}^m c^i)$$

sujeto a

$$\Sigma_{i=1}^m c^i - \Sigma_{i=1}^m w^i \in Y$$

donde Y es el cono de producción convexo y cerrado.

Considérese ahora el caso en el que las funciones de utilidad son difere pero las dotaciones son todas proporciones positivas θ_i, $\Sigma_{i=1}^m \theta_i = 1$, del tor de dotaciones agregado w. (Esta condición asegura que la distribució la renta es fija). Sea u^i la representación homogénea de grado uno de la fur de utilidad del consumidor i. Entonces, el único equilibrio de este modelo de encontrarse maximizando $\Sigma_{i=1}^m \theta_i \log u^i(c^i)$ sujeto a las restricciones de bilidad.

Un atractivo mayor para poder caracterizar un equilibrio de un mc como una solución a un problema de optimización sin restricciones late consiste en asegurarnos que el modelo tiene un equilibrio único. Si existe c problema de optimización para un problema dado que involucre externalid: independientemente de que sea o no fácil de encontrar, es una cuestión d tegrabilidad. Dechert (1978) proporciona las condiciones necesarias y sufici continuo. Desafortunadamente, aunque sin duda hay mucho campo para la investigación en esta área, las condiciones de integrabilidad aparentan ser o muy difíciles de comprobar, o muy restrictivas.

Nuestro enfoque también puede ser útil para la derivación de propiedades de equilibrios con externalidades. Jones y Manuelli (1988) y Kehoe y Levine (1985), por ejemplo, consideran modelos dinámicos que satisfacen propiedades de estacionariedad fuerte. Utilizando técnicas de la teoría de programación dinámica, los impuestos distorsionadores de Jones, cuyos efectos son similares a los que causan las externalidades, la inversión en bienes de capital heterogéneos debe de maximizar una función social de rendimientos distorsionada. Además, los precios de los bienes de inversión son las derivadas parciales de esta función. Como la función es cóncava en los bienes de capital, Kehoe y Levine argumentan que, bajo ciertas condiciones, esto tiene implicaciones empíricas.

Sin duda, sería posible derivar los resultados de Jones-Manuelli y de Kehoe-Levine examinando las condiciones de equilibrio para el modelo sin utilizar la caracterización de la optimización. Sin embargo, la teoría de programación dinámica proporciona un conjunto poderoso de herramientas que pueden facilitar gran parte de las demostraciones.

Referencias

ABEL, A. B., y BLANCHARD, O. J. (1983): «An intertemporal equilibrium model of saving and investment», *Econometrica*, 51, 675-92.

ARROW, K. J. (1962): «The economics of learning by doing», *Review of Economic Studies*, 29, 155-73.

BECKER, R. A. (1985): «Capital income taxation and perfect foresight», *Journal of Public Economics*, 26, 147-67.

BRAUN, R. A. (1988): «The dynamic interaction of distortionary taxes and aggregate variables in poswar U.S. data», Unpublished manuscript, Carnegie-Mellon University.

BROCK, W. A. (1975): «Some results on dynamic integrability», Center for Mathematical Studies in Business and Economics, University of Chicago Report 7551.

BROCK, W. A. (1977): «A polluted golden age», en *Economics of Natural and Environmental Resources*, ed. V. L. Smith, New York, Gordon and Breach.

CHANG, F. R. (1988): «The inverse optimal problem: A dynamic programing approach», *Econometrica*, 56, 147-72.

CHANG, L.-J. (1988): «Corporate taxes, disaggregated capital markets, and business cycles», Unpublished manuscript, Carnegie-Mellon University.

CHIPMAN, J. S. (1974): «Homothetic preferences and aggregation», *Journal of Economic Theory*, 8, 26-38.

DANTHINE, J. O., y DONALDSON, J. B. (1986): «A note on the effect of capital income taxation on the dynamics of a competitive economy», *Journal of Public Economics*, 28, 255-65.

DECHERT, D. (1978): «Optimal control problems from second-order difference equations», *Journal of Economic Theory*, 19, 50-63.

CINSBURGH, V. A., y VAN DER HEYDEN, L. (1988): «On extending the Negishi approach to computing equilibria: The case of goverment price support policies», *Journal*

HOWITT, P., y McAFEE, R. P. (1988): «Stability of equilibria with externalities», *Qu* *Journal of Economics*, 103, 261-277.

IRWIN, M. C. (1980): *Smooth Dynamical Systems*, New York, Academic Press.

JONES, L. E., y MANUELLI, R. (1988): «A model of optimal equilibrium gr Unpublished manuscript, Northwestern University.

JUDD, K. L. (1987): «Useful planning equivalents of taxes economies», Unput manuscript, Hoover Institution.

KEHOE, T. J., y LEVINE, D. K. (1985): «Empirical implications of complete con claims», Unpublished manuscript, UCLA.

KEHOE, T. J.; LEVINE, D. K., y ROMER, P. M. (1989): «On characterizating equili economies with externalities and taxes as solutions to optimization problems», Un hed manuscript, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

McGRATTAN, E. R. (1988): «The macroeconomic effects of tax policy in an equil model», Unpublished manuscript, Stanford University.

NEGISHI, T. (1960): «Welfare economics and existence of equilibrium for a com economy», *Metrometrica*, 12, 92-7.

ROMER, P. M. (1986): «Increasing returns and long-run growth», *Journal of P Economy*, 94, 1002-36.

ROMER, P. M. (1989): «Capital accumulation and long run growth», en *Moderns B Cycle Theory*, ed. R. Barro, Cambridge, MA, Harvard University Press.

SCARF, H. E. (1982): «The computation of equilibria prices», en *Handbook of Mathe Economics*, vol. II, ed. K. J. Arrow y M. D. Intriligator, New York, North Hol

SPEAR, S. E. (1988): «Growth, externalities, and sunsports», Unpublished manu Carnegie-Mellon University.

UZAWA, H. (1962): «Walras' existence theorem and Brouwer's fixed point the *Economics Studies Quarterly*, 13, 59-62.

WOODFORD, M. (1986): «Stationary sunspot equilibria: The case of small fluct around a deterministic steady state», Unpublished manuscript, University of Ch